Tekijä: Mikael Mannonen

Matemaattisia kaavoja

Tähän tekstiin olen koonnut valittuja paloja yleisesti hyväksytystä matematiikasta ja fysiikasta, joihin viittaan muissa kirjoituksissani.

Einsteinin erityinen suhteellisuusteoria

Vasemmanpuoleiset yhtälöt (1-4) ovat muuntokaavoja ajalle t, etäisyydelle l, liikemassalle m ja liikemäärälle p paikallaan olevan A-havaitsijan koordinaatistosta liikkuvan B-havaitsijan koordinaatistoon, jossa vastaavat suureet ovat aika t', etäsyys l', liikemassa m' ja liikemäärä p' (kumpi havaitsija on toisen suhteen paikallaan, A vai B, on pelkkä mielipideasia). Oikeanpuoleiset yhtälöt (1-4) ovat muuntokaavoja B-havaitsijan maailmasta takaisin A-havaitsijan maailmaan. Kaavoissa v on liikkuvan havaitsijan nopeus ja c on valon nopeus.

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Leftrightarrow \quad l = l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (2)$$

$$m' = m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{m'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

$$p' = p\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{p'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4)$$

Suhteelisuusteoreettisissa laskuissa ei useinkaan pelkkä etäisyyden l tietäminen riitä, vaan tarvitaan täsmällinen sijainti x, y, z, t aika-avaruudessa. Näiden muuttujien kesken pätee differentiaaliyhtälö 5, joka määrittää Lorentz-maailman metriikan:

$$dl^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (5)$$

Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria

Erityinen suhteellisuusteoria, vaikka se sisältääkin kaavat 3 ja 4 käytettäväksi pienien massojen kanssa, ei sisällä gravitaatiokenttää: erityisessä suhteellisuusteoriassa oletetaan avaruuden olevan massaton. Yleinen suhteellisuusteoria ottaa huomioon gravitaation ja siten myös massojen olemassaolon. Yleinen suhteellisuusteoria määritellään Einsteinin yhtälöllä 6:

$$G_{ab} = \kappa T_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = -\frac{8\pi f}{c^4}T_{ab}, \quad \kappa = -\frac{8\pi f}{c^4} \qquad (6)$$

Yleiseen suhteellisuuteoriaan on kehitelty useita erilaisia metriikoita. Alkuperäinen Einsteinin käyttämä metriikka on differentiaaliyhtälössä 7:

$$ds^2 = g_{ab}\, dx^a\, dx^b \quad (7)$$

Yhtälö 7 kertoo lähinnä sen, että aika-avaruuden kaikkia neljää komponenttia, x, y, z ja t, kohdellaan laskutoimituksissa samalla tavalla. Mikä tämä tapa on, se määritellään metrisellä tensorilla g_{ab}. Jotta saisimme selville Riccin tensorin R_{ab} ja Riccin skalaarin R, meidän on ensin johdettava metrisestä tensorista g_{ab} Riemannin kaarevuustensori $R^d{}_{abc}$

$$R^d{}_{abc} = \frac{\partial}{\partial x^b}\, \Gamma^d{}_{ac} - \frac{\partial}{\partial x^c}\, \Gamma^d{}_{ab} + \Gamma^d{}_{bs}\, \Gamma^s{}_{ac} - \Gamma^d{}_{cs}\, \Gamma^s{}_{ab} \quad (8)$$

missä merkintä

$$\Gamma^c{}_{ab} \quad [9]$$

tarkoittaa Christoffelin symbolia:

$$\Gamma^d{}_{ab} = g^{dc}\, \Gamma_{cab} = \frac{1}{2}\, g^{dc} \left(\frac{\partial\, g_{ca}}{\partial\, x^b} + \frac{\partial\, g_{cb}}{\partial\, x^a} - \frac{\partial\, g_{ab}}{\partial\, x^c} \right) \quad [10]$$

Muokataan Riemannin kaarevuustensori kovariantiksi tensoriksi R_{dabc}:

$$R_{dabc} = g_{ds}\, R^s{}_{abc} \quad (11)$$

Nyt saamme Riccin tensorin R_{ac}

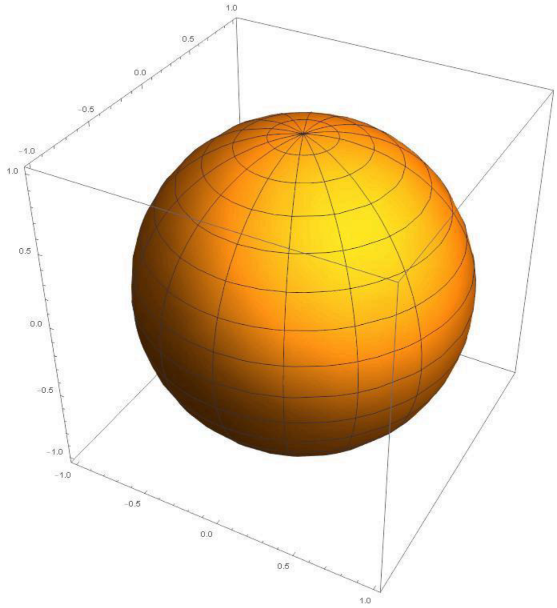
$$R_{ac} = g^{db}\, R_{dabc} \quad (12)$$

ja Riccin skalaarin R:

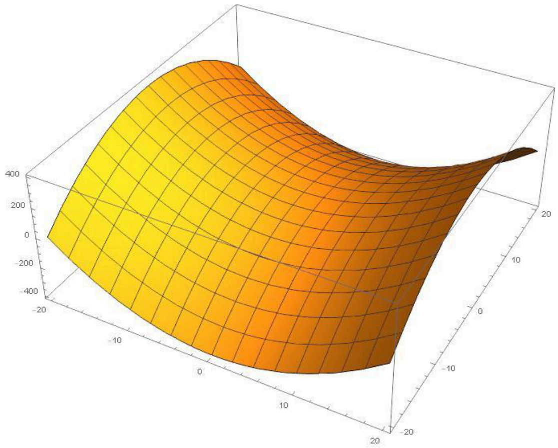
$$R = g^{ac}\, R_{ac} \quad (13)$$

Riemannin monistot

Saksalainen matemaatikko Bernhard Riemann (1826-1866) kehitti Riemannin geometriaksi kutsutun matematiikan osa-alueen n-ulotteisten pintojen istuttamiseksi n+1 ulotteisiin avaruuksiin, joita kutsutaan monistoiksi. Edellä mainittu metrinen tensori, jota yleinen suhteellisuusteoria hyödyntää, on Riemannin geometrian ydin. Metrinen tensori on jokaisessa moniston pisteessä määritelty sisätulo, joka muuntuu sileällä tavalla pisteestä toiseen. Metrinen tensori on aina 2. astetta eli matriisi riippumatta ulottuvuuksien määrästä. Metrisen tensorin toisen kertaluvun osittaisderivaatoista voidaan muodostaa moniston kaarevuusmittari, Riemannin kaarevuustensori. Tällaisia sileästi Gaussin kaarevuuden mukaisesti kaareutuvia pintoja muodostavia tensoreita on lukemattomia erilaisia, mutta tässä tekstikokoelmassa meitä kiinnostavat ainoastaan sellaiset metriset tensorit, joissa pinta on yhtä kappaletta ja kaareutumisen määrä pisteestä toiseen on vakio. Mutta näitäkin tensoreita on useita! Esimerkiksi 3-ulotteisen avaruuden 2-ulotteisista pinnoista löytyy kuvien 1 ja 2 kaksi vaihtoehtoa, jotka täyttävät asetetut ehdot:



Kuva 1: pallon pinta on äärellinen ja rajaton.



Kuva 2: hyperbolisen paraboloidin pinta on ääretön ja rajaton. Kuvan pinta leviää äärettömiin kolmessa ulottuvuudessa, mutta tässä näytetään vain laatikon sisälle mahtuva osa pinnasta..

Mutta koska äärellisen ja rajattoman periaate edellyttää suljettua pintaa, vain pallopinta on mahdollinen. Siispä tässä tekstikokoelmassa meille ei riitä se, että kaareutumisen määrä on pisteestä toiseen vakio yhtenäisessä pinnassa, vaan meitä kiinnostaa ainoastaan kuvan 1 tilanne, aina seitsemänteen ulottuvuuteen asti.

Analyyttinen lukuteoria

Luonnolliset luvut 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... jakautuvat kahteen ryhmään: uniikkeihin alkulukuihin ja niistä koostuviin komposiittilukuihin. Alkulukuja ovat luvut, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla 1, eli alkulukuja ovat esimerkiksi 2, 3, 5, 7, 11, ... Alkulukuja on äärettömän monta. Mitkä luvut luonnollisista luvuista ovat alkulukuja ja miten ne sijoittuvat komposiittilukujen sekaan, se on analyyttisen lukuteorian sisältö. Käytännössä asiaa tutkitaan koordinaatistossa sijoittamalla kaikki luonnolliset luvut x-akselille ja merkitsemällä y-akselille löydettyjen alkulukujen lukumäärä, niin kuin täällä on tehty.

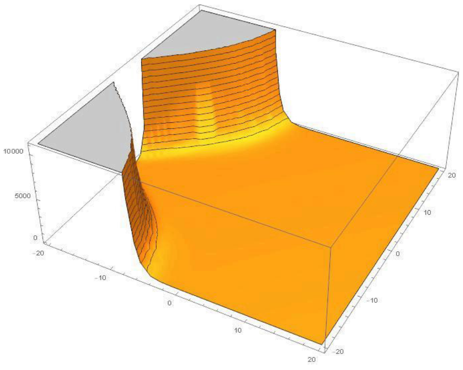
Analyyttinen lukuteoria perustuu Riemannin Zeta-funktioon ζ:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (14)$$

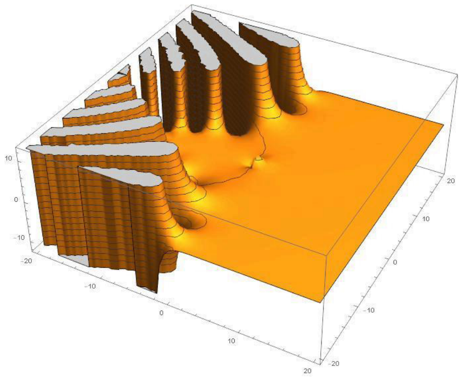
Mutta kaavan 14 versio Zeta-funktiosta ζ pätee vain reaalilukualueella $s > 1$, eikä se siten sovi analyyttisen lukuteorian käyttöön, sillä kaikki nollakohdat sijaitsevat alueella $s < 1$. Tässä tekstikokoelmassa tarvitaan nimenomaan kyseisiä nollakohtia. Onneksi Zeta-funktiosta on olemassa analyyttinen versio, joka kompleksifunktiona kattaa koko reaalilukualueen:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)^{1-s} \quad (15)$$

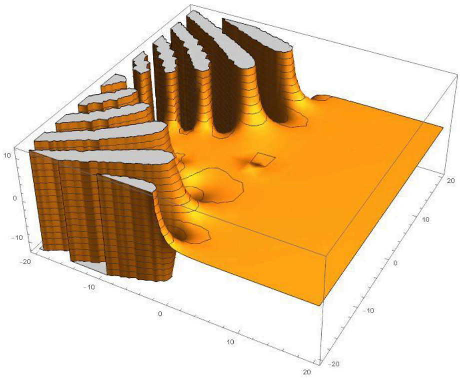
Funktion 15 itseisarvon kompleksiavaruuteen piirtämältä pinnalta löytyvät sekä triviaalit että epätriviaalit nollakohdat (Epätriviaaleista nollakohdista mainittakoon, että niihin liittyvä Riemannin hypoteesi on edelleen todistamatta, vaikka Bernhard Riemann esitti sen jo vuonna 1859. Kyseisellä hypoteesilla ei kuitenkaan ole vaikutusta analyyttiseen lukuteoriaan – ainakaan käytännön tasolla). Mutta entä millaisen kuvaajan Funktio 15 piirtää kompleksiavaruuteen? Koska kyseessä on kompleksiarvoinen funktio, kuvaajia on itse asiassa kaksi: kompleksiluvun reaaliosa ja imaginaariosa kummatkin piirtävät oman kuvaajansa eli pinnan kompleksiavaruuteen. Jos nämä molemmat pinnat lävistävät kompleksitason samassa pisteessä, on kompleksiarvoisella funktiolla kyseisessä pisteessä nollakohta. Funktion 15 piirtämät pinnat on näytetty kuvissa 3, 4 ja 5:



Kuva 3: Riemannin Zeta-funktion itseisarvon piirtämä pinta.



Kuva 4: Riemannin Zeta-funktion reaaliosan piirtämä pinta.



Kuva 5: Riemannin Zeta-funktion imaginaariosan piirtämä pinta.